

1 Exemples d'applications linéaires

Exercice 1 ★ Applications linéaires ou non (sur \mathbb{R}^n) ? –

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[839]

Exercice 2 ★ Applications linéaires ou non (sur les polynômes) ? –

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P'(1))$;
2. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto AP$, où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé ;
3. $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P^2$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2944]

Exercice 3 ★ Applications linéaires ou non (espace de fonctions) ? –

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} . Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\phi_1 : E \rightarrow E, \phi_1(f)(x) = (f(x))^2$;
2. $\phi_2 : E \rightarrow E, \phi_2(f)(x) = (f(x^2))$;
3. $\phi_3 : E \rightarrow E, \phi_3(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2945]

2 Applications linéaires sur \mathbb{R}^n

Exercice 4 ★ Noyau et image –

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de f , son image. f est-elle injective ? surjective ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[840]

Exercice 5 ★ Noyau et image –

On considère l'application linéaire f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\text{ker}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[874]

Exercice 6 ★ Application linéaire donnée par l'image d'une base –

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, u(e_2) = 3e_2, u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[875]

Exercice 7 ★ Définie par une base –

On considère dans \mathbb{R}^2 les trois vecteurs $u = (1, 1)$, $v = (2, -1)$ et $w = (1, 4)$.

1. Démontrer que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$ et $f(w) = (5, a)$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[877]

Exercice 8 ★★ Noyau prescrit ? –

Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\}$. Existe-t-il des applications linéaires de E dans F dont le noyau est H ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[892]

Exercice 9 ★★ A noyau fixé –

Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont le noyau est E .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[878]

Exercice 10 ★★★ Application linéaire à contraintes –

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de \mathbb{R}^4 tel que, si (e_1, e_2, e_3, e_4) désigne la base canonique, alors on a

1. $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$.
2. $\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[879]

3 Applications linéaires sur d'autres espaces

Exercice 11 ★ Dérivation –

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(f) = f'$. Quel est le noyau de ϕ ? Quelle est son image ? ϕ est-elle injective ? surjective ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[841]

Exercice 12 ★ Avec des fonctions continues –

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et u l'endomorphisme de E qui à tout f de E associe $u(f) : x \mapsto xf(x)$. L'application u est-elle injective ? surjective ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2946]

Exercice 13 ★★ –

Soit E l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note $L : E \rightarrow E$ l'application qui à $f \in E$ associe $L(f)$ définie par $L(f) : x \mapsto f(x)f(x)$.

1. Montrer que L est un endomorphisme de E .
2. Préciser le noyau et l'image de L .
3. L'application L est-elle injective ? surjective ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2947]

Exercice 14 ★★★★★ Application linéaire définie sur un espace de polynôme –

Soit $E = \mathbb{C}[X]$, p un entier naturel et f l'application de E dans E définie par $f(P) = (1 - pX)P + X^2P'$. f est-elle injective ? surjective ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[838]

Exercice 15 ★★★★★ Applications linéaires dans un espace de polynômes –

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base de $\text{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\text{ker}(u)$.
4. Montrer que $\text{ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[887]

Exercice 16 ★★★★★ Automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$ –

Soit $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P(X + 1) + P(X)$.

1. Soit $n \geq 0$. Démontrer que ϕ induit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3104]

Exercice 17 ★ –

1. Pour $0 \leq k \leq n$, on note $B_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$. Démontrer que la famille (B_0, \dots, B_n) forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On définit ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k$. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3111]

Exercice 18 ★★★★★ Différence de polynômes –

Soit $n \geq 1$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(P) = P(X + 1) - P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de ϕ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[880]

Exercice 19 ★★★★★ Des polynômes –

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application définie sur E par $f(P) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
2. Pour $p = 0, \dots, n$, déterminer le degré de $f(X^p)$? En déduire $\text{ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
3. Soit Q un polynôme de $\text{Im}f$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[889]

Exercice 20 ★★★★★ Polynôme somme de polynômes dérivés –

Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[888]

Exercice 21 ★★★★★ Division euclidienne –

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux polynômes de degré $n+1$. On définit l'application $\phi : E \rightarrow E$ qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B .

1. Démontrer que ϕ est linéaire ;
2. Démontrer que ϕ est bijective si et seulement si A et B sont premiers entre eux.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[893]

Exercice 22 ★★★★★ Application aux polynômes –

Le but de cet exercice est l'étude de l'application Δ définie sur $[X]$ par $(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Question préliminaire : Soit (P_n) une famille de $[X]$ telle que pour chaque n , $\deg(P_n) = n$. Prouver que (P_n) est une base de $[X]$.
2. Montrer que Δ est une application linéaire. Calculer son noyau et son image.
3. Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $[X]$ vérifiant, pour tout $n \geq 1$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$, $H_n(0) = 0$ et telle que $H_0 = 1$. Montrer que (H_n) est une base de $[X]$.
4. Soit $P \in_p [X]$. Montrer que P peut s'écrire

$$P = \sum_{n=0}^p (\Delta^n P)(0) H_n.$$

5. Montrer que l'on a $(\Delta^n P)(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k)$.
6. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.
7. En déduire que, pour tout polynôme P de degré p , les assertions suivantes sont équivalentes :
 P prend des valeurs entières sur \mathbb{Z} . P prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$. Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont des entiers. P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.
8. P prend des valeurs entières sur \mathbb{Z} .
9. P prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$.
10. Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont des entiers.
11. P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[890]

4 Projections, symétries

Exercice 23 ★ Géométrie des symétries et projections –

1. Dans \mathbb{R}^2 , considérons les sous-espaces vectoriels $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$ et $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$. Démontrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Considérons s la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 et p la projection sur D_1 parallèlement à D_2 . Dessiner les sous-espaces vectoriels D_1, D_2 ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (1, 1)$, $\vec{w} = (2, 1)$. Vérifier vos résultats par le calcul.

2. Dans \mathbb{R}^3 , considérons les sous-espaces vectoriels $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x, z = 0\}$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$. Démontrer que $D \oplus P = \mathbb{R}^3$. Considérons s la symétrie par rapport à P parallèlement à D et p la projection sur P parallèlement à D . Dessiner les sous-espaces vectoriels D, P ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Vérifier vos résultats par le calcul.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3075]

Exercice 24 ★ Éléments caractéristiques d'une projection –

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f(x, y, z) = (-3x + 2y - 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 5z)$. Montrer que f est la projection sur un plan P parallèlement à une droite D . Donner une équation cartésienne du plan P et un vecteur directeur de D .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3095]

Exercice 25 ★ Symétrie –

On considère l'endomorphisme $s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$s(x, y, z) = (-x - 4y - 2z, 4x + 9y + 4z, -8x - 16y - 7z).$$

1. Montrer que s est une symétrie.
2. Déterminer $F = \ker(s - Id)$ et $G = \ker(s + Id)$ et une base de chacun des ces deux sous-espaces.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3003]

Exercice 26 ★ Projection ou symétrie –

On considère l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 2z, y, x - z)$. f est-elle une symétrie ? une projection ? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2563]

Exercice 27 ★ Expression analytique d'une projection –

Soit F et G les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\} \\ G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y = -z\}. \end{aligned}$$

1. Démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Donner l'expression analytique de la projection p sur F parallèlement à G (c'est-à-dire donner une formule explicite $p(x, y, z) = (\dots)$).
3. Donner l'expression analytique de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3105]

Exercice 28 ★ Une projection dans $\mathbb{R}[X]$ –

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul, et $\phi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application qui à un polynôme P associe son reste dans la division euclidienne par A . Démontrer que ϕ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3109]

Exercice 29 ★★ Deux projections –

Soit E un espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $p \neq q$. Démontrer que (p, q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[852]

Exercice 30 ★★ Projections et sommes directes –

Soient E_1, \dots, E_n des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. Montrer que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et que $p_1 + \dots + p_n = Id_E$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[850]

Exercice 31 ★★★ Endomorphismes annulant un polynôme de degré 2 –

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soient α, β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E = \text{Im}(f - \alpha \text{Id}_E) + \text{Im}(f - \beta \text{Id}_E)$. On suppose de plus que α et β sont non nuls et que

$$(f - \alpha \text{Id}_E) \circ (f - \beta \text{Id}_E) = 0.$$

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1} .

3. Démontrer que $E = \ker(f - \alpha \text{Id}_E) \oplus \ker(f - \beta \text{Id}_E)$.

4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f - \alpha \text{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f - \beta \text{Id}_E)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[855]

Exercice 32 ★★★★★ Somme de deux projecteurs –

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

2. Montrer que, dans ce cas, on a $\text{Im}(p + q) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$ et $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[853]

5 Exercices théoriques sur les applications linéaires

Exercice 33 ★ Inclusion de noyaux et d'images –

Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $1 \leq p \leq q$ deux entiers. Comparer $\ker(f^p)$ et $\ker(f^q)$, puis $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Im}(f^q)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3108]

Exercice 34 ★ Avez-vous compris ce qu'étaient le noyau et l'image ? –

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que

$$g \circ f = 0 \iff \text{Im} f \subset \ker g.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[842]

Exercice 35 ★★ Endomorphismes qui commutent –

Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer que $\ker(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v , c'est-à-dire que

$$v(\ker(u)) \subset \ker(u) \text{ et } v(\text{Im}(u)) \subset \text{Im}(u).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[849]

Exercice 36 ★★ Endomorphisme nilpotent et famille libre –

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[843]

Exercice 37 ★★★★★ Une caractérisation des homothéties –

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Démontrer que pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

2. Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.

Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est liée. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.

3. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est liée.

4. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x, y) est libre.

5. En déduire que f est une homothétie.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[846]

Exercice 38 ★★ ★★ Quand le noyau et l'image sont supplémentaires –

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Démontrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et que $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.
2. Démontrer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$ si et seulement si $\ker(f) = \ker(f^2)$.
3. Démontrer que $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = E$ si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2624]

Exercice 39 ★★ ★★ –

Soit E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant

$$f \circ g \circ f = f \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

1. Démontrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont en somme directe.
2. Démontrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont supplémentaires.
3. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $f(P) = P'$, $g : P(x) \mapsto \int_0^x P(t)dt$. Vérifier que f et g satisfont toutes les conditions de l'énoncé. Sont-elles inversibles ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2633]

Exercice 40 ★★ ★★ ★★ Image de la composée et somme de l'image et du noyau –

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que

$$E = \operatorname{Im}(f) + \ker(g) \iff \operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3107]

6 Applications linéaires en dimension finie

Exercice 41 ★★ ★★ Du local au global... –

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe un entier $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe un entier n tel que $f^n = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[899]

Exercice 42 ★★ ★★ –

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \operatorname{Im} f \cap \ker(f) = \{0\}.$$

2. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que

$$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \operatorname{Im} f \oplus \ker(f) = E \iff \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[901]

Exercice 43 ★★ ★★ Noyau égal à l'image –

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$ si et seulement si E est de dimension paire.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[902]

Exercice 44 ★★★★★ **Noyau et image choisis –**

Soit E un espace vectoriel de dimension n , F un sous-espace vectoriel de E de dimension p , G un sous-espace vectoriel de E de dimension q . Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme f de E avec $\ker(f) = F$ et $\operatorname{Im}(f) = G$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[903]

Exercice 45 ★★★★★ **Endomorphisme de rang r et endomorphismes de rang 1. –**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer que f est la somme de r applications linéaires de rang 1.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3110]

Exercice 46 ★★★★★ **D'un sous-espace sur un autre –**

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. A quelle condition sur F et G existe-t-il un endomorphisme f de E tel que $f(F) = G$?
2. Quelle(s) condition(s) supplémentaire(s) faut-il imposer pour qu'on puisse trouver un tel endomorphisme f qui soit de plus bijectif?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[904]

Exercice 47 ★★★★★ **Composée et somme –**

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

2. On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est inversible. Prouver que $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = n$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[906]

Exercice 48 ★★★★★ **Suite exacte –**

Soient E_0, \dots, E_n des espaces vectoriels de dimensions finies respectivement égales à a_0, \dots, a_n . On suppose qu'il existe n applications linéaires f_0, \dots, f_{n-1} telles que, pour chaque $k \in \{0, \dots, n-1\}$, f_k est une application linéaire de E_k dans E_{k+1} et

1. f_0 est injective;
2. $\ker(f_k) = \operatorname{Im}(f_{k-1})$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$;
3. f_{n-1} est surjective. Prouver que $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = 0$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[908]

Exercice 49 ★★★★★ **Base donnée par un endomorphisme nilpotent –**

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que g commute avec f (ie $fg = gf$) si et seulement si $g \in \operatorname{vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[900]

Exercice 50 ★★★★★ **Noyaux itérés –**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $k \geq 1$. Démontrer que $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$.
2. Démontrer que si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^{k+2})$. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
si $k < p$, alors $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$; si $k \geq p$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$.

Démontrer que $p \leq n$;

3. Démontrer que si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^{k+1}) = \ker(f^{k+2})$.

4. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

si $k < p$, alors $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$; si $k \geq p$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$.

5. si $k < p$, alors $\ker(f^k) \neq \ker(f^{k+1})$;

6. si $k \geq p$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$.

7. Démontrer que $p \leq n$;

8. Démontrer que si $k < p$, alors $\text{Im}(f^k) \neq \text{Im}(f^{k+1})$ et si $k \geq p$, alors $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$.

9. Démontrer que $\ker(f^p)$ et $\text{Im}(f^p)$ sont supplémentaires.

10. Démontrer qu'il existe deux sous-espaces F et G de E tels que F et G sont supplémentaires, $f|_F$ est nilpotent et $f|_G$ induit un automorphisme de G .

11. Soit $d_k = \dim(\text{Im}(f^k))$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})$ est décroissante.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[905]

Exercice 51 ★★★★★ Quand le rang est additif –

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \iff \begin{cases} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} \\ \ker(f) + \ker(g) = E \end{cases}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[907]

7 Formes linéaires et hyperplans

Exercice 52 ★ Intersection de deux hyperplans –

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit H_1, H_2 deux hyperplans distincts de E . Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3106]

Exercice 53 ★★★★★ Formes linéaires proportionnelles –

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $\varphi \in E^*$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $\varphi((X-a)P) = 0$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = \lambda P(a)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[986]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Vérifiez si la définition d'une application linéaire est vérifiée, et si vous n'y parvenez pas, prouvez à l'aide d'un contre-exemple qu'il ne s'agit pas d'une application linéaire.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Vérifiez si la définition d'une application linéaire est vérifiée, et si vous n'y parvenez pas, prouvez à l'aide d'un contre-exemple qu'il ne s'agit pas d'une application linéaire.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Indication pour l'exercice 4 ▲

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. De plus, $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
 2. On peut vérifier la dimension de $\ker(f)$ en utilisant le théorème du rang.
 3. Quelles sont les dimensions de $\ker(f)$? de $\text{Im}(f)$?
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Commencer par calculer $u(x, y, z)$. Puis utiliser la caractérisation des endomorphismes injectifs.
 2. Quelle est la dimension de $\text{Im}(u)$? Commencer par donner une famille génératrice facile de $\text{Im}(u)$, et en extraire une base !
 3. Montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\text{Im}(u)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

- 1.
 2. Exprimer w dans la base (u, v) .
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

Quelle est la dimension de H ? Est-ce compatible avec le théorème du rang ?

Indication pour l'exercice 9 ▲

Compléter (u, v) en une base (u, v, w) de \mathbb{R}^3 , et définir f sur cette base.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Déterminer quelles doivent être les valeurs de $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$. On pourra trouver une base de $\ker(f)$.

Indication pour l'exercice 11 ▲

Indication pour l'exercice 12 ▲

Déterminer le noyau de u , et démontrer que la fonction égale à 1 n'est pas dans l'image de u .

Indication pour l'exercice 13 ▲

- 1.

2. Démontrer que l'image est l'ensemble des fonctions impaires.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 14 ▲

f étant linéaire, il suffit de calculer son noyau et son image. On peut notamment prouver que $\text{Im}(f)$ ne contient pas de polynôme de degré $p+1$.

Indication pour l'exercice 15 ▲

1. Il faut vérifier que u est linéaire.
 2. $u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$.
 3. Ecrire $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et calculer $u(P)$.
 4. Montrer que la réunion des deux bases trouvées précédemment est une base de E .
-

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Il suffit de démontrer que ϕ est injective.
 2. Utiliser le résultat de la question précédente pour prouver la surjectivité.
-

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Le terme de plus bas degré de chaque B_k est X^k . Dans une relation de liaison $\lambda_0 B_0 + \dots + \lambda_n B_n = 0$, commencer par prouver que $\lambda_0 = 0$.
 2. Calculer le noyau de ϕ .
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

On pourra étudier quel est le degré de $(X+1)^k - X^k$. Ensuite, il est facile de démontrer que $\text{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer l'inclusion réciproque à l'aide du théorème du rang.

Indication pour l'exercice 19 ▲

- 1.
 2. Utiliser le théorème du rang pour déterminer $\text{Im}(f)$.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

Traduire cet exercice par le fait qu'une application linéaire doit être un isomorphisme. Utiliser les outils d'algèbre linéaire pour prouver que c'est un isomorphisme.

Indication pour l'exercice 21 ▲

- 1.
 2. Pour démontrer que A et B sont premiers entre eux, utiliser le théorème de Bézout. Pour la réciproque, il suffit de démontrer que ϕ est injective.
-

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Montrer d'abord que c'est une famille libre. Pour prouver que c'est une famille génératrice, il faut prouver que tout polynôme de degré p est combinaison linéaire de P_0, \dots, P_p . Simplifier le problème en prouvant que (P_0, \dots, P_p) est une base de ${}_p[X]$, en utilisant un résultat spécifique à la dimension finie.
2. La linéarité ne pose pas de problèmes. Montrer que le noyau est l'ensemble des polynômes constants, en calculant par exemple le coefficient dominant de ΔP , puis que l'image est $[X]$ tout entier, en construisant une famille de polynômes à degré étagés dans l'image.

3. En posant $E = \{P \in [X]; P(0) = 0\}$, montrer que E est un supplémentaire de $\ker(\Delta)$. L'existence et l'unicité viennent alors du résultat de la question précédente (on pourra procéder par récurrence). Quel est le degré de H_n ?

4. Utiliser d'abord le fait que (H_n) est une base. Calculer ensuite $\Delta^n P$.

5. Calculer par récurrence, ou par la formule du binôme, $(\Delta^n P)(X)$, puis évaluer en 0.

6. Vérifier que la famille donnée satisfait aux conditions qui définissent de façon unique la suite (H_n) .

7. Prouver d'abord l'équivalence des 3 premiers points. Pour montrer l'équivalence avec le 4^{ième}, utiliser un changement de variables pour ramener *iv.* à *ii.* pour un autre polynôme !

Indication pour l'exercice 23 ▲

Pour démontrer les sommes directes, on pourra utiliser la dimension. Pour les calculs effectifs, on pourra s'aider des dessins pour vérifier les décompositions de \vec{u} en somme d'un vecteur de D_1 et de D_2 (et de même pour les 6 vecteurs demandés), et utiliser la définition des symétries et projecteurs.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Cela revient à calculer $f \circ f$, $\text{Im}(f)$ et $\ker(f)$.

Indication pour l'exercice 25 ▲

Indication pour l'exercice 26 ▲

Commencer par calculer $f \circ f$.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Pour la deuxième et la troisième question, il s'agit essentiellement de décomposer un vecteur (x, y, z) dans la somme directe $F \oplus G$.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Commencer par démontrer que ϕ est linéaire, puis que $\phi \circ \phi = \phi$.

Indication pour l'exercice 29 ▲

Supposer que $q = \lambda p$ et calculer de deux façons différentes q^2 en fonction de p .

Indication pour l'exercice 30 ▲

Prouver d'abord que $p_1(x) + \dots + p_n(x) = x$ pour tout $x \in E_i$.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. Exprimer Id_E en fonction de $f - \alpha \text{Id}_E$ et de $f - \beta \text{Id}_E$.
 2. Développer et trouver g tel que $f \circ g = g \circ f = \text{Id}_E$.
 3. Utiliser 1.
 4. Utiliser encore 1.
-

Indication pour l'exercice 32 ▲

1. Pour montrer que la condition est nécessaire, on pourra d'abord prouver que $p \circ q + q \circ p = 0$, puis calculer $p^2 \circ q$ de deux façons différentes.

2. Pour montrer que $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$ sont en somme directe, on pourra remarquer que $x = p(x) = q(x)$ pour tout élément de l'intersection. Pour prouver que $\text{Im}(p) + \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p + q)$, on pourra démontrer que pour tout z du premier ensemble, on a $z = p(z) + q(z)$.

Indication pour l'exercice 33 ▲

Les inclusions ne vont pas dans le même sens. On pourra écrire $q = p + (q - p)$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Indication pour l'exercice 35 ▲

Indication pour l'exercice 36 ▲

Considérer un x tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.

Indication pour l'exercice 37 ▲

- 1.
 2. Écrire $y = \mu x$ et calculer $f(\mu x)$ de deux façons différentes. Calculer $f(x + y)$ de deux façons différentes.
 3. Écrire $y = \mu x$ et calculer $f(\mu x)$ de deux façons différentes.
 4. Calculer $f(x + y)$ de deux façons différentes.
 - 5.
-

Indication pour l'exercice 38 ▲

- 1.
 - 2.
 3. Pour prouver le sens réciproque, considérer $y \in E$ et utiliser que $f(y) = f^2(z)$ pour un certain $z \in E$. On pourra poser $u = y - f(z)$...
-

Indication pour l'exercice 39 ▲

1. Prendre un vecteur dans l'intersection et utiliser que $g \circ f \circ g = g$.
 2. Procéder par analyse synthèse.
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 40 ▲

Indication pour l'exercice 41 ▲

Introduire une base de E .

Indication pour l'exercice 42 ▲

1. Remarquer que l'on a toujours $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Pour prouver le sens direct, prendre un élément y de l'intersection, l'écrire $y = f(x)$ et montrer que $f^2(x) = 0$. Pour prouver la réciproque, prendre x tel que $f^2(x) = 0$, poser $y = f(x)$ et montrer que y appartient à ... inter ...
 2. Utiliser le théorème du rang pour remarquer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$ est équivalent à $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$. Utiliser ensuite la question précédente pour démontrer que les deux premières propositions sont équivalentes. Montrer ensuite, toujours à l'aide du théorème du rang, que la première et la troisième sont équivalentes.
-

Indication pour l'exercice 43 ▲

Pour un sens, utiliser le théorème du rang. Pour la réciproque, considérer (e_1, \dots, e_{2p}) une base de E et définir f sur cette base. On séparera $f(e_i)$, pour $i \leq p$, et $f(e_i)$, pour $i > p$.

Indication pour l'exercice 44 ▲

La condition naturelle s'obtient en utilisant le théorème du rang. Pour la réciproque, une application linéaire peut être définie par l'image d'une base. On pourra considérer une base dont les premiers vecteurs constituent une base de F .

Indication pour l'exercice 45 ▲

Considérer une base (u_1, \dots, u_r) de $\text{Im}(f)$, la compléter en une base de F , et utiliser les projections sur les u_i, \dots

Indication pour l'exercice 46 ▲

1. Un endomorphisme ne peut que faire décroître la dimension.
 2. Les dimensions doivent être égales !
-

Indication pour l'exercice 47 ▲

1. Remarquer que $\text{Im}(u+v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. Pour la seconde partie, écrire $u = (u+v) + (-v)$.
2. Prouver que $u \circ v = 0$ entraîne

$$n \geq \text{rg}(v) + \text{rg}(u).$$

Prouver que $u+v$ inversible entraîne

$$n \leq \text{rg}(v) + \text{rg}(u).$$

Indication pour l'exercice 48 ▲

Utiliser le théorème du rang et les hypothèses pour écrire

$$a_k = \dim(\ker(f_k)) + \text{rg}(f_k) = \text{rg}(f_{k-1}) + \text{rg}(f_k),$$

avec $1 \leq k \leq n-1$.

Indication pour l'exercice 49 ▲

1. Écrire une relation de liaison, et composer par f^{n-1} .
 2. La valeur de $g(x)$ fixe les coefficients de g dans $\text{vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$.
-

Indication pour l'exercice 50 ▲

1. Suivre les définitions.
 2. Écrire $f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x))$ Minorer la dimension de $\ker(f^k)$ si cet entier p n'existe pas. Même preuve.
 3. Écrire $f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x))$
 4. Minorer la dimension de $\ker(f^k)$ si cet entier p n'existe pas.
 5. Même preuve.
 6. Théorème du rang.
 7. Théorème du rang + $\ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$.
 8. F et G sont donnés par la question précédente.
 9. Prouver que $d_k - d_{k+1} = \dim(\ker(f) \cap \text{Im}(f^k))$.
-

Indication pour l'exercice 51 ▲

Dans le sens direct, montrer d'abord que $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$ puis que $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. En déduire la deuxième partie.

Indication pour l'exercice 52 ▲

Appliquer la formule de Grassmann.

Indication pour l'exercice 53 ▲

A quelle condition deux formes linéaires sont proportionnelles ?

Correction de l'exercice 1 ▲

1. f est une application linéaire. Prenons $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans \mathbb{R}^2 , et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x') + (y+y'), (x+x') - 2(y+y'), 0) \\ &= (x+y, x-2y, 0) + (x'+y', x'-2y', 0) \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0) \\ &= \lambda(x+y, x-2y, 0) \\ &= \lambda f(u). \end{aligned}$$

2. f n'est pas une application linéaire car $f((0,0)) \neq (0,0,0)$.

3. f n'est pas une application linéaire. En effet,

$$f((1,0)) = 1, f((-1,0)) = 1 \text{ et } f((0,0)) = 0 \neq f((1,0)) + f((-1,0)).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. f est une application linéaire. En effet, si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors utilisant notamment

$$(P+Q)'(1) = P'(1) + Q'(1) \text{ et } (\lambda P)'(1) = \lambda P'(1),$$

on déduit facilement que

$$f(P+Q) = f(P) + f(Q)$$

et que

$$f(\lambda P) = \lambda f(P).$$

2. Dans ce cas aussi, f est une application linéaire. En effet, en utilisant la distributivité du produit sur la somme, si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(P+Q) = A(P+Q) = AP + AQ = f(P) + f(Q)$$

et

$$f(\lambda P) = A(\lambda P) = \lambda(AP) = \lambda f(P).$$

3. Dans ce troisième cas, f n'est pas une application linéaire. En effet, pour $P = X$ et $Q = X$, on a

$$f(P+Q) = (2X)^2 = 4X^2$$

alors que

$$f(P) + f(Q) = X^2 + X^2 = 2X^2.$$

Ainsi, $f(P+Q) \neq f(P) + f(Q)$, et f n'est pas une application linéaire.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Non ! Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = 2x$ de sorte que $\phi_1(f+g)(x) = 4x^2$, alors que $\phi_1(f)(x) + \phi_1(g)(x) = x^2 + x^2 = 2x^2$. On a donc $\phi_1(f+g) \neq \phi_1(f) + \phi_1(g)$ et donc ϕ_1 n'est pas une application linéaire.

2. Oui ! Soit f, g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_2(f+g)(x) = (f+g)(x^2) = f(x^2) + g(x^2) = \phi_2(f)(x) + \phi_2(g)(x)$$

et

$$\phi_2(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x^2) = \lambda f(x^2) = \lambda \phi_2(f)(x).$$

Remarquons que la place du carré (sur la variable ici) diffère de la place du carré dans la première question (sur la fonction).

3. Oui ! Ceci découle de la linéarité de l'intégrale. Soit f, g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_3(f+g)(x) = \int_0^x (f+g)(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt = \phi_3(f)(x) + \phi_3(g)(x)$$

et

$$\phi_3(\lambda f)(x) = \int_0^x (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_0^x f(t)dt = \lambda \phi_3(f)(x).$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Commençons par déterminer le noyau de f . $(x, y) \in \ker f$ si et seulement si $f(x, y) = (0, 0, 0)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ x-y = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $\ker(f) = \{(0, 0)\}$, et en particulier que f est injective. Déterminons maintenant l'image de f . Un vecteur (u, v, w) est dans l'image de f si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, (u, v, w) = f(x, y) &\iff \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \\ w = x+y \end{cases} \\ &\iff \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} u = x+y \\ u+v = 2x \\ w-u = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{u-v}{2} = y \\ \frac{u+v}{2} = x \\ w-u = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Im}(f) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u - w = 0\}$. En particulier, $(1, 1, 0)$ n'est pas dans $\text{Im}(f)$, et donc f n'est pas surjective.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Utilisant la définition de f , on a :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, -1, 0, 1) \\ f(e_2) &= (0, 1, 1, 1) \\ f(e_3) &= (1, 0, 1, 2) \end{aligned}$$

On sait que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Or, $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ et donc $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $(f(e_1), f(e_2))$. Ainsi, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est déjà génératrice de $\text{Im}(f)$. De plus, elle est libre car les deux vecteurs sont non-nuls et ne sont pas proportionnels. On en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

2. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} x+z = 0 \\ -x+y = 0 \\ y+z = 0 \\ x+y+2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y+z = 0 \\ y+z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur $(-1, -1, 1)$ engendre $\ker(f)$. Comme il est non-nul, c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, on trouve que $\ker(f)$ est de dimension 1, ce que l'on peut aussi obtenir en utilisant le théorème du rang.

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. f n'est pas surjective, car son image n'est pas \mathbb{R}^4 tout entier. En effet, la dimension de $\text{Im}(f)$ est 2, et non 4.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. On commence par calculer $u(x, y, z)$. On a

$$u(x, y, z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)$$

soit

$$u(x, y, z) = (-2x - 4z, 3y, 2x + 4z).$$

On a donc

$$(x, y, z) \in \ker(u) \iff \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

On a donc $\ker(u) = \text{vect}(-2, 0, 1)$ et le vecteur $(-2, 0, 1)$ est une base de $\ker(u)$. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie \mathbb{R}^3 , il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}.$$

2. On sait, d'après le théorème du rang, que $\text{Im}(u)$ est de dimension 2. On sait aussi que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}u$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $(u(e_1), u(e_2))$ est une telle famille. C'est donc une base de $\text{Im}(u)$ qui est de rang 2.

3. Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\text{Im}(u)$ est une base de \mathbb{R}^3 . Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $((-2, 0, 1), (-2, 0, 2), (0, 3, 0))$ est une famille libre. C'est très facile et laissé au lecteur...

Correction de l'exercice 7 ▲

1. (u, v) sont deux vecteurs non-nuls de \mathbb{R}^2 , non colinéaires. Ils forment une famille libre de \mathbb{R}^2 de deux vecteurs. Or, \mathbb{R}^2 est de dimension 2. (u, v) est donc une base de \mathbb{R}^2 .

2. Exprimons w dans la base (u, v) . On a $w = 3u - v$. Pour que f soit linéaire, on doit avoir

$$f(w) = 3f(u) - f(v)$$

soit

$$(5, a) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4).$$

Pour que f soit linéaire, il est donc nécessaire que $a = 4$. Réciproquement, on définit ainsi bien une application linéaire, en définissant l'image d'une base.

Correction de l'exercice 8 ▲

On a $H = \text{vect}((1, 1, 1, 1))$. H est donc un espace vectoriel de dimension 1. Si H était le noyau d'une application linéaire f de E dans F , alors par le théorème du rang on aurait

$$4 = \dim(E) = \dim(H) + \dim(\text{Im}(f)) = 1 + \dim(\text{Im}(f)).$$

Ainsi, on aurait $\dim(\text{Im}(f)) = 3$. Mais $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 , sa dimension est au plus 2. On a une contradiction. Donc H n'est pas le noyau d'un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Première méthode : Une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même est définie par

$$f(x, y, z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)$$

où les a_i, b_i, c_i sont des réels. On va déterminer quelle(s) valeur(s) leur donner pour que $f(u) = 0$ et $f(v) = 0$. On a

$$f(u) = 0 \iff (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$$

et

$$f(v) = 0 \iff (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3) = (0, 0, 0).$$

On obtient $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et $b_1 = -c_1, b_2 = -c_2, b_3 = -c_3$. Ainsi, l'application f suivante convient

$$(x, y, z) \mapsto (y - z, y - z, y - z).$$

Puisque $u, v \in \ker(f)$, le sous-espace vectoriel E engendré par (u, v) est contenu dans $\ker(f)$. De plus, f n'étant pas identiquement nulle, son noyau est de dimension au plus 2. On en déduit que $\ker(f)$ est de dimension exactement 2, et que $\ker(f) = E$. Deuxième méthode : Une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans lui-même est complètement définie par l'image d'une base. Complétons d'abord (u, v) en une base (c'est possible, car c'est une famille libre). Posons $w = (0, 0, 1)$. Alors on vérifie facilement que la famille (u, v, w) est une famille libre de \mathbb{R}^3 à trois éléments, donc une base de \mathbb{R}^3 . On définit f par

$$f(u) = (0, 0, 0), f(v) = (0, 0, 0), f(w) = (1, 0, 0).$$

Ceci définit parfaitement f et, comme dans la première méthode, on prouve que le noyau de f est exactement E .

Correction de l'exercice 10 ▲

Un endomorphisme est uniquement défini par l'image d'une base. Il suffit donc de calculer quelles doivent être les valeurs de $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$. On sait déjà que :

$$f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3. f(3e_4) = e_2 - 2f(e_1), \text{ soit } f(e_4) = \frac{1}{3}(-2e_1 + 3e_2 - 2e_3).$$

Reste à définir $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Pour cela, on va chercher une base de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$. On a aisément :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - 2y \\ t = x + 3y \end{cases}$$

On en déduit que $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, 3)\}$ est une base de F . Puisqu'on veut que $F = \ker(f)$, on doit donc avoir

$$f(e_1) - f(e_3) + f(e_4) = 0 \implies f(e_3) = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3$$

et

$$f(e_2 - 2e_3 + 3e_4) = 0 \implies f(e_2) = 2f(e_3) - 3f(e_4).$$

Donc l'endomorphisme f , s'il existe, est unique. Réciproquement, soit f l'endomorphisme défini par les formules précédentes. Alors le premier point est vérifié, et puisque l'image d'une base de F est envoyée par f sur 0, on sait que $F \subset \ker(f)$. Pour démontrer l'égalité, il suffit, puisque $\dim(F) = 2$, de prouver que $\dim(\ker(f)) \leq 2$. Par le théorème du rang, il suffit de prouver que $\dim(\text{Im}(f)) \geq 2$. Mais $f(e_1)$ et $f(e_4)$ sont deux vecteurs indépendants de $\text{Im}(f)$. Et donc $\dim(\text{Im}(f)) \geq 2$, ce qui prouve le résultat. On peut remarquer qu'on a en réalité $\dim(\ker(f)) = \dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sa dérivée nulle si et seulement si elle est constante. Le noyau de ϕ est donc l'ensemble des fonctions constantes. En particulier, ϕ n'est pas injective. D'autre part, si g est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , alors elle admet une primitive f qui est donc elle aussi de classe \mathcal{C}^∞ , c'est-à-dire élément de

E . On a alors $\phi(f) = g$, ce qui signifie que $\text{Im}(\phi) = E$. ϕ est surjective. Cet exercice illustre le fait que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie, puisque ϕ est surjective mais n'est pas injective.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $f \in E$. Alors $u(f) = 0$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = 0$. Ceci entraîne que pour tout x différent de 0, $f(x) = 0$. Comme f est continue en 0, on en déduit que $f = 0$. On a donc $\ker(u) = \{0\}$ et u est injective. D'autre part, soit $g \in E$ telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g n'est pas un certain $u(f)$. En effet, si c'était le cas, on aurait $xf(x) = g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en particulier, en $x = 0$, $0 = 1$. Donc u n'est pas surjective. Ceci illustre que E n'est pas de dimension finie, puisque u est injective, mais n'est pas surjective.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Laissé au lecteur !

2. Le noyau de L est l'ensemble des fonctions f qui vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$: c'est donc l'ensemble des fonctions paires. On va prouver que l'image de L est l'ensemble des fonctions impaires. D'une part, soit g dans l'image de L , autrement dit il existe $f \in E$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(-x)$. Alors

$$g(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = -(f(x) - f(-x)) = -g(x)$$

et donc g est impaire. Réciproquement, soit g une fonction impaire, et posons $f = g/2$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f(-x) = \frac{g(x)}{2} - \frac{g(-x)}{2} = \frac{g(x)}{2} + \frac{g(x)}{2} = g(x).$$

Ainsi, $g = L(f)$, et on a prouvé l'inclusion réciproque.

3. L'application linéaire L n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$, elle n'est pas non plus surjective car son image n'est pas E tout entier (il existe des fonctions qui ne sont pas impaires).

Correction de l'exercice 14 ▲

Il est facile de vérifier que f est linéaire. Pour savoir si elle est injective, on calcule son noyau. Soit $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ un polynôme. Alors

$$f(P) = \sum_{i=0}^n a_i X^i - p \sum_{i=0}^n a_i X^{i+1} + \sum_{i=1}^n i a_i X^{i+1}$$

soit, après un changement d'indice

$$f(P) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i - (p+1-i)a_{i-1})X^i + (n-p)a_n X^{n+1}.$$

Si $f(P) = 0$, on obtient donc $a_0 = 0$ et $a_i = (p+1-i)a_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$ ce qui entraîne $a_i = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$. Ainsi, $P = 0$, le noyau de f est réduit à $\{0\}$ et f est injective. D'autre part, si P est un polynôme de degré n , alors le calcul précédent montre que

pour $n = p$, le degré de $f(P)$ est inférieur ou égal à n , et donc différent de $p+1$; pour $n \neq p$, alors $f(P)$ est de degré $n+1 \neq p+1$.

Ainsi, $\text{Im}(f)$ ne contient pas de polynômes de degré $p+1$. Donc f n'est pas surjective.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Remarquons d'abord que si $P \in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E . Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que u est linéaire. Mais, si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q) + (1-X)(P + \lambda Q)' \\ &= P + \lambda Q + (1-X)(P' + \lambda Q') \\ &= P + (1-X)P' + \lambda(Q + (1-X)Q') \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

u est donc bien linéaire.

2. Puisque $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E , on sait que $u(1), u(X), u(X^2), u(X^3)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(u)$. On va pouvoir en extraire une base. On a :

$$u(1) = 1, u(X) = X, u(X^2) = -X^2 + 2X, u(X^3) = -2X^3 + 3X^2.$$

On en déduit que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que $u(X)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même $u(X) = u(1)$). Ainsi, ceci prouve que $(u(1), u(X^2), u(X^3))$ est une base de $\text{Im}(u)$.

3. Ecrivons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, et calculons $u(P)$:

$$u(P) = -2aX^3 + (3a - b)X^2 + 2bX + c + d.$$

Ainsi, on obtient

$$u(P) = 0 \iff \begin{cases} -2a = 0 \\ 3a - b = 0 \\ 2b = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = c \\ d = -c \end{cases}$$

Ainsi, $P \in \ker(u) \iff \exists c \in \mathbb{R}, P = c(X - 1)$. Une base de $\ker(u)$ est donné par le polynôme $X - 1$.

4. La réunion des bases de $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ trouvées précédemment est $(1, -X^2 + 2X, -2X^3 + 3X^2, X - 1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment une base de E . Ceci prouve que $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Remarquons d'abord que ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, il suffit de démontrer que ϕ est injective. Mais puisque $\deg(P(X) + P(X + 1)) = \deg(P(X))$, le noyau de ϕ est clairement réduit à $\{0\}$. Donc ϕ est injective, ce qui prouve que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Bien entendu, ϕ , même considérée en tant qu'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, reste injective. Reste à montrer qu'elle est surjective. Comme $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, on ne peut plus utiliser le théorème du rang. Cependant, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors il existe $n \geq 0$ tel que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Puisque ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $Q = \phi(P)$. Donc ϕ est surjective (même considérée comme un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$) !

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Remarquons d'abord que la famille (B_0, \dots, B_n) est une famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension $n + 1$. Elle forme donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si elle est libre. D'autre part, le point clé est que le terme de plus bas degré de B_k est X^k (il n'y a pas de termes en X^{k-1} , etc...). Procédons par l'absurde et supposons que la famille (B_0, \dots, B_n) est liée. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels, non tous nuls, tels que $\lambda_0 B_0 + \dots + \lambda_n B_n = 0$. Soit k le plus petit entier tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors, le terme de degré k de $\lambda_0 B_0 + \dots + \lambda_n B_n$ est $\lambda_k X^k$. Il doit être nul, et donc λ_k doit être égal à 0, ce qui est une contradiction. Donc la famille (B_0, \dots, B_n) est libre : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, et que ϕ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de démontrer que ϕ est injective. Soit $P \in \ker(\phi)$. Alors on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k = 0.$$

Puisque (B_0, \dots, B_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, on a donc $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ pour tout $k = 0, \dots, n$. Autrement dit, P admet $n + 1$ racines distinctes. Puisque P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que $P = 0$ et donc que ϕ est injective. Remarquons ici qu'on aurait pu remplacer (B_0, \dots, B_n) par n'importe quelle autre base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Le degré de $(X+1)^k - X^k$ est égal à $k-1$, sauf si $k=0$ car dans ce cas on a affaire au polynôme nul. En particulier, si P est de degré d , $P(X) = a_d X^d + \dots + a_0$, alors

$$\phi(P) = a_d((X+1)^d - X^d) + \dots + a_1$$

est de degré $d-1$, sauf si $d=0$ où on a le polynôme nul. On en déduit que le noyau de ϕ est l'ensemble des polynômes constants. D'autre part, l'image de ϕ est clairement contenue dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or, ce dernier espace est de dimension n , et par le théorème du rang,

$$\dim(\operatorname{Im}(\phi)) = n+1 - \dim(\ker(\phi)) = n.$$

Ainsi, on a $\operatorname{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\dim(\operatorname{Im}(\phi)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont donc égaux. Remarquons que ce serait beaucoup plus difficile à démontrer sans le théorème du rang.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. f est clairement une application linéaire. Puisque $\deg(P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)) \leq \deg(P(X))$, elle est bien à image dans E .

2. On a

$$f(X^p) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (1 + (-1)^k) X^{p-k} - 2X^p.$$

Le coefficient devant X^p est nul (il vaut $1+1-2$), celui devant X^{p-1} aussi (il vaut $p(1-1)$), et celui devant X^{p-2} vaut $p(p-1)$. Ainsi, si $p \geq 2$, le degré de $f(X^p)$ est $p-2$. Sinon, $f(X^p)$ est le polynôme nul. On en déduit, par linéarité, que $f(P)$ est de degré $\deg(P)-2$ si $\deg(P) \geq 2$, et est le polynôme nul sinon. Ainsi, $\ker(f) = \mathbb{R}_1[X]$. Par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n+1-2 = n-1$. De plus, on a vu que $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}_{n-2}[X]$. C'est donc que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

3. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(0) = P'(0) = 0\}$. Alors G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. On vérifie facilement que, pour $P(X) = a_n X^n + \dots + a_0$, $P \in G \iff a_0 = a_1 = 0$, et donc une base de G est (X^2, X^3, \dots, X^n) . Ainsi, G est de dimension $n-1$. Notons $g: G \rightarrow \operatorname{Im}(f)$, $P \mapsto f(P)$. g est injective, car $G \cap \ker(f) = \{0\}$. De plus, $\dim(G) = \dim(\operatorname{Im}(f))$. Ainsi, g est une bijection de G sur $\operatorname{Im}(f)$. Ceci prouve le résultat.

Correction de l'exercice 20 ▲

Considérons $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(Q) = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$ (il est facile de vérifier que ϕ est linéaire). Le but de l'exercice est de démontrer que ϕ est bijective. Etant une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, il suffit de prouver que ϕ est injective, ou encore que son noyau est réduit au polynôme nul. Mais si Q n'est pas le polynôme nul, il est clair que $\phi(Q)$ a même degré que Q , et le même coefficient dominant. On en déduit que $\phi(Q) = 0 \implies Q = 0$. ϕ est bijective.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Soient P_1, P_2 dans $\mathbb{R}_n[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$AP_1 = BQ_1 + \phi(P_1), AP_2 = BQ_2 + \phi(P_2)$$

ce qui donne

$$A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (\phi(P_1) + \lambda \phi(P_2)).$$

Mais $\phi(P_1) + \lambda \phi(P_2)$ est de degré inférieur ou égal à n , et donc c'est le reste de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B . Autrement dit,

$$\phi(P_1) + \lambda \phi(P_2) = \phi(P_1 + \lambda P_2)$$

et ϕ est linéaire.

2. Supposons ϕ bijective. Alors ϕ est surjective, et il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi(P) = 1$. Ainsi, on obtient deux polynômes P et Q tels que

$$AP - BQ = 1.$$

D'après le théorème de Bézout, on en déduit que A et B sont premiers entre eux. Réciproquement, puisque ϕ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il suffit de prouver que ϕ est injective sous l'hypothèse que A et B sont premiers entre eux. Mais si $\phi(P) = 0$, il existe un polynôme Q tel que

$$AP = BQ.$$

Par le théorème de Gauss, puisque $A \wedge B = 1$, $B|P$. Mais comme le degré de B est $n+1$ et que P est de degré inférieur ou égal à n , $P = 0$. Donc ϕ est injective, d'où bijective.

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Pour montrer que la famille est libre, il suffit de prouver que toute sous-famille finie est libre ou encore que, pour tout p , la famille (P_0, \dots, P_p) est libre. Imaginons que l'on ait une relation de liaison $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_p P_p = 0$, où l'un au moins des α_i est non nul. Soit q le plus grand des i pour lequel $\alpha_i \neq 0$. Alors, le polynôme $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_q P_q$ est de degré q , et en même temps il est nul : c'est bien sûr une contradiction. La famille (P_n) est donc libre. D'autre part, fixons un $p \geq 0$ et Q un polynôme de degré p . Puisque (P_0, \dots, P_p) est une famille libre de ${}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$, elle en est une base. Ainsi, Q peut s'écrire $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_p P_p$, ce qui prouve que la famille (P_n) est génératrice : c'est donc une base de $[X]$.

2. La linéarité ne pose pas de problèmes. D'autre part, si le terme dominant de P est $\alpha_n X^n$, le terme dominant de $\Delta(P)$ est $\alpha_n \times n X^{n-1}$. Ainsi, $\Delta P = 0$ si et seulement si $P \in {}_0[X]$ (ie si P est un polynôme constant). D'autre part, posons pour $n \geq 0$ $P_n = \Delta(X^{n+1})$. La famille (P_n) est une famille de polynômes à degrés étagés. En outre, cette famille est contenue dans $\text{Im}(\Delta)$. On a donc, d'après le résultat de la question préliminaire, $[X] = \text{vect}(P_n; n \geq 0) \subset \text{Im}(\Delta)$. Ceci prouve que Δ est surjective.

3. On note $E = \{P \in [X]; P(0) = 0\}$. E est un supplémentaire de ${}_0[X]$ dans $[X]$. Ainsi, Δ induit un isomorphisme de E sur $[X]$. On montre alors l'existence et l'unicité de H_n par récurrence sur n , le cas $n = 0$ étant donné par l'énoncé. Supposons (H_0, \dots, H_{n-1}) uniquement construits. Alors, la remarque précédente fait qu'il existe un unique H_n de E tel que $\Delta(H_n) = H_{n-1}$. On montre alors facilement par récurrence que pour chaque n , $\deg(H_n) = n$ (cela vient du fait que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ si P n'est pas un polynôme constant). D'après le résultat de la question préliminaire, (H_n) forme une base de $[X]$.

4. Puisque (H_n) est une base de $[X]$, il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que $P = \alpha_0 H_0 + \dots + \alpha_p H_p$. Calculons $\Delta^n(P)$, sachant que $\Delta^n(H_k) = H_{k-n}$ si $n \leq k$, $\Delta^n(H_k) = 0$ sinon. On obtient donc :

$$\Delta^n P = \alpha_n H_0 + \dots + \alpha_p H_{p-n}.$$

On évalue ensuite ce polynôme en 0, en utilisant le fait que $H_k(0) = 0$ si $k \neq 0$, mais vaut 1 si $k = 0$. On obtient donc :

$$\Delta^n P(0) = \alpha_n.$$

5. On va montrer que

$$(\Delta^n P)(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k),$$

l'évaluation en 0 faisant le reste. Notons $T(P)(X) = P(X+1)$; clairement, $T^k(P)(X) = P(X+k)$. Remarquons que $\Delta = T - I$. Puisque T et I commutent, il est légitime d'appliquer la formule du binôme, et on a :

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T^k.$$

Il suffit d'évaluer ceci en P pour obtenir le résultat annoncé.

6. Posons $Q_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ pour $n \geq 1$, avec $Q_0 = 1$. On remarque que pour tout $n \geq 1$, $Q_n(0) = 0$, et un calcul quasi-immédiat montre que $\Delta Q_n = Q_{n-1}$. Ainsi, la famille (Q_n) satisfait les conditions uniques qui définissent la famille (H_n) . C'est donc que $Q_n = H_n$ pour tout $n \geq 0$.

7. Il est d'abord clair que $i. \implies ii.$. Que $ii.$ entraîne $iii.$ résulte du calcul de $\Delta^n P(0)$ et de la décomposition de P dans la base H_n . Remarquons d'autre part que si a est dans $\{0, \dots, n-1\}$, $H_n(a) = 0$, et si $a \geq n$, $H_n(a) = \binom{a}{n}$. Si $a < 0$, a s'écrit $-b$ avec $b > 0$, et on a $H_n(a) = (-1)^n \binom{b+n-1}{n}$. La décomposition de P dans la base H_n fait alors que $P(a) \in \mathbb{C}$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, et on a prouvé l'équivalence des 3 premiers points. Démontrons enfin que la dernière proposition est équivalente aux trois premières. Il est clair que $i. \implies iv.$ Réciproquement, si P

prend des valeurs entières sur $\{a, \dots, a+p\}$, alors $Q(X) = P(X+a)$ prend des valeurs entières sur $\{0, \dots, p\}$, et par l'équivalence des 3 premiers points, Q prend des valeurs entières sur tout entier. Il en est de même pour P .

Correction de l'exercice 23 ▲

1. D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles; elles sont donc de dimension 1. De plus, on a clairement $D_1 \cap D_2 = \{(0,0)\}$ donc D_1 et D_2 sont supplémentaires. De $\dim(D_1 \oplus D_2) = \dim(D_1) + \dim(D_2)$, on tire que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$. Le dessin que l'on obtient est le suivant :

On remarque que \vec{u} est un vecteur de D_2 . Son image par p est donc le vecteur nul, et son image par s et son opposé. \vec{v} est un vecteur de D_1 . Il est invariant par p comme par s . Finalement, pour construire l'image de \vec{w} par p , on considère la parallèle à D_2 passant par \vec{w} : elle coupe D_1 en \vec{v} . On a ainsi $p(\vec{w}) = \vec{v}$. Pour construire l'image de \vec{w} par s , on utilise que, notant $\vec{w}_1 = \vec{w} - \vec{v}$, $s(\vec{w}) = \vec{v} - \vec{w}_1$. Par le calcul on a

$\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in D_2$, et donc $p(\vec{u}) = \vec{0}$, $s(\vec{u}) = \vec{0} - \vec{u} = -\vec{u}$. $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ avec $\vec{v} \in D_1$, et donc $p(\vec{v}) = s(\vec{v}) = \vec{v}$. $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$, avec $\vec{v} \in D_1$ et $\vec{u} \in D_2$, et donc $p(\vec{w}) = \vec{v}$, $s(\vec{w}) = \vec{v} - \vec{u} = (0, 1)$.

2. $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in D_2$, et donc $p(\vec{u}) = \vec{0}$, $s(\vec{u}) = \vec{0} - \vec{u} = -\vec{u}$.

3. $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ avec $\vec{v} \in D_1$, et donc $p(\vec{v}) = s(\vec{v}) = \vec{v}$.

4. $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$, avec $\vec{v} \in D_1$ et $\vec{u} \in D_2$, et donc $p(\vec{w}) = \vec{v}$, $s(\vec{w}) = \vec{v} - \vec{u} = (0, 1)$.

5. P est un plan vectoriel (une base est donnée par les vecteurs $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$). Il est donc de dimension 2. D , comme intersection de deux plans vectoriels non confondus, est une droite vectorielle dont une base est donnée par $(1, 1, 0)$. Elle est donc de dimension 1. Comme dans la question précédente, on vérifie que $D \cap P = \{(0, 0, 0)\}$ (c'est immédiat), et donc que D et P sont en somme directe. De $\dim(D \oplus P) = \dim(D) + \dim(P) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on déduit que D et P sont supplémentaires : $D \oplus P = \mathbb{R}^3$. Pour construire les images des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on procède comme dans le plan, mais il faut avoir une bonne vue dans l'espace ! Pour plus de lisibilité, on va réaliser 3 dessins différents. Pour chacun de ces dessins, l'axe (Ox) est en rouge, l'axe (Oy) est en vert et l'axe (Oz) est en bleu. La droite D est elle aussi représentée en bleu foncé, et le plan P est en bleu ciel.

On a $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Posons $\vec{u}_1 = (0, -1, 0)$ et $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$. Alors $\vec{u}_1 \in P$, $\vec{u}_2 \in D$ et $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. On a donc $p(\vec{u}) = \vec{u}_1$ et $s(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-1, -2, 0)$.

On a $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Posons $\vec{v}_1 = (0, -1, 1)$ et $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$. Alors $\vec{v}_1 \in P$, $\vec{v}_2 \in D$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. On a donc $p(\vec{v}) = \vec{v}_1$ et $s(\vec{v}) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (-1, -2, 1)$.

On a $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Posons $\vec{w}_1 = (0, -1, 0)$ et $\vec{w}_2 = (2, 2, 0)$. Alors $\vec{w}_1 \in P$, $\vec{w}_2 \in D$ et $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. On a donc $p(\vec{w}) = \vec{w}_1$ et $s(\vec{w}) = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 = (-2, -3, 0)$.

Correction de l'exercice 24 ▲

Notons A la matrice de f dans la base canonique. On a

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors on vérifie facilement que $A^2 = A$, c'est-à-dire que $f \circ f = f$: f est donc une projection. Pour déterminer

ses éléments caractéristiques, on commence par calculer $\ker(f)$:

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ -3x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = -2y \\ y = y \\ z = 2y \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a donc $\ker(f) = \text{vect}(u)$ avec $u = (-2, 1, 2)$. Par le théorème du rang, on sait que $\text{Im}(f)$ est de dimension 2. Soit $v_1 = f(e_1) = (-3, 2, 4)$ et $v_2 = f(e_2) = (2, 0, -2)$. Alors (v_1, v_2) est une famille libre contenue dans $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 2, donc c'est une base de $\text{Im}(f)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \text{Im}(f) &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = -3\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda \\ z = 4\lambda - 2\mu \end{cases} \\
 &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \mu = \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \\ \lambda = \frac{y}{2} \\ z = 2y - x - \frac{3y}{2} \end{cases} \\
 &\iff 2x - y + 2z = 0.
 \end{aligned}$$

f est donc la projection sur le plan $P = \text{Im}(f)$ d'équation $2x - y + 2z = 0$ parallèlement à la droite D de vecteur directeur $u = (-2, 1, 2)$.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
 (s \circ s)(x, y, z) &= s(s(x, y, z)) = s(\underbrace{-x - 4y - 2z}_x, \underbrace{4x + 9y + 4z}_y, \underbrace{-8x - 16y - 7z}_z) \\
 &= (-X - 4Y - 2Z, 4X + 9Y + 4Z, -8X - 16Y - 7Z).
 \end{aligned}$$

Or, $-X - 4Y - 2Z = x$, $4X + 9Y + 4Z = y$ et $-8X - 16Y - 7Z = z$. On a donc $s \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc s est une symétrie.

2. On a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x - 4y - 2z = x \\ 4x + 9y + 4z = y \\ -8x - 16y - 7z = z \end{cases} \iff x + 2y + z = 0.$$

Ainsi, on a

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + 2y + z = 0\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1)).$$

De même, on a $(x, y, z) \in G$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x - 4y - 2z = -x \\ 4x + 9y + 4z = -y \\ -8x - 16y - 7z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 4x + 8y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + 2y = 0 \\ 2z + 5y + 2x = 0 \\ 3z + 8y + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + 2y = 0 \\ y + 2x = 0 \\ 2y + 4x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - 4x = 0 \\ y + 2x = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $G = \{(x, -2x, 4x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, -2, 4))$.

Correction de l'exercice 26 ▲

On vérifie facilement que

$$f \circ f(x, y, z) = (2(2x - 2z) - 2(x - z), y, 2x - 2z - x + z) = (2x - 2z, y, x - z) = f(x, y, z).$$

On a donc $f \circ f = f$ et f est une projection, sur $\text{Im}(f)$ et parallèlement à $\ker(f)$. Déterminons une base de $\ker(f)$. On a

$$f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

Une base de $\ker(f)$ est donc donnée par le vecteur $u = (1, 0, 1)$. Déterminons ensuite une base de $\text{Im}(f)$. On sait que $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Ce n'est pas une base, puisque $f(e_3) = (-2, 0, -1) = -f(e_1)$. Posons ensuite $v = (2, 0, 1) = f(e_1)$ et $w = (0, 1, 0) = f(e_2)$. Alors (v, w) est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ et c'est aussi une famille libre : (v, w) est une base de $\text{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 27 ▲

1. On commence par remarquer que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si $(x, y, z) \in F \cap G$, on a $x + y + 2z = 0$, d'où, en utilisant $x = -z$ et $y = z$, $2z = 0$, soit $z = 0$, et finalement $x = y = z = 0$. D'autre part, calculons la dimension de F et la dimension de G . On a

$$(x, y, z) \in F \iff \begin{cases} x = -y - 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

de sorte que (u_1, u_2) est une base de F , avec $u_1 = (-1, 1, 0)$ et $u_2 = (-2, 0, 1)$. Ainsi $\dim(F) = 2$. De même, on a

$$(x, y, z) \in G \iff \begin{cases} x = -y \\ y = y \\ z = y \end{cases}$$

de sorte que $u_3 = (-1, 1, 1)$ est une base de G , et que $\dim(G) = 1$. On déduit de la formule de Grassmann que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = 3$$

et donc que $F + G = \mathbb{R}^3$.

2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On va le décomposer sous la forme $u = u_F + u_G$, où $u_F \in F$ et $u_G \in G$. Pour cela, on écrit $u_F = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_G = (-\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $(x_1, y_1, z_1) = (x + \lambda, y - \lambda, z - \lambda)$ et puisque $(x_1, y_1, z_1) \in F$, on sait que

$$x_1 + y_1 + 2z_1 = 0 \iff x + y + 2z - 2\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{x + y + 2z}{2}.$$

Ainsi, on a

$$u_F = \left(\frac{3x + y + 2z}{2}, \frac{-x + y - 2z}{2}, \frac{-x - y}{2} \right)$$

et

$$u_G = \left(-\frac{x + y + 2z}{2}, \frac{x + y + 2z}{2}, \frac{x + y + 2z}{2} \right).$$

Ainsi,

$$p(x, y, z) = u_F = \left(\frac{3x + y + 2z}{2}, \frac{-x + y - 2z}{2}, \frac{-x - y}{2} \right).$$

3. L'essentiel du raisonnement a été fait. On a

$$s(x, y, z) = u_F - u_G = (2x + y + 2z, -x - 2z, -x - y - z).$$

Correction de l'exercice 28 ▲

Remarquons d'abord que ϕ est linéaire. En effet, si $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, alors $\phi(P_1)$ (resp. $\phi(P_2)$) est l'unique polynôme de degré inférieur (strict) au degré de A et tel que

$$P_1 = AQ_1 + \phi(P_1), \quad P_2 = AQ_2 + \phi(P_2),$$

avec $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$. On a alors

$$P_1 + P_2 = A(Q_1 + Q_2) + (\phi(P_1) + \phi(P_2))$$

avec $\deg(\phi(P_1) + \phi(P_2)) < \deg(A)$, ce qui prouve que $\phi(P_1 + P_2) = \phi(P_1) + \phi(P_2)$. De la même façon on démontre que $\phi(\lambda P) = \lambda \phi(P)$. Remarquons que $\phi \circ \phi(P) = \phi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. En effet,

$$\phi(P) = A \times 0 + \phi(P)$$

avec $\deg(\phi(P)) < \deg(A)$. Ainsi, ϕ est bien une projection. Reste à calculer son noyau et son image. On a $\phi(P) = 0$ si et seulement si P est un multiple de A , et donc

$$\ker(\phi) = \{QA : Q \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Enfin, si $d = \deg(A)$, on a $\text{Im}(\phi) \subset \mathbb{R}_{d-1}[X]$. Réciproquement, si $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$, alors

$$P = 0 \times A + \phi(P)$$

est la division euclidienne de P par A et donc $P = \phi(P) \in \text{Im}(\phi)$. Si A est un polynôme constant, il faut interpréter $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ comme $\{0\}$.

Correction de l'exercice 29 ▲

Si (p, q) n'est pas libre, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, tel que $q = \lambda p$. Alors

$$\lambda p = q = q^2 = \lambda^2 p^2 = \lambda^2 p.$$

On a donc $\lambda^2 = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ puisque $\lambda \neq 0$, ce qui contredit $p \neq q$.

Correction de l'exercice 30 ▲

Soit $i \neq j$. Il est clair que $\text{Im}(p_j) = E_j \subset \ker(p_i)$ ce qui prouve que $p_i \circ p_j = 0$. D'autre part, si $x \in E_i$, on a

$$p_1(x) + \cdots + p_i(x) + \cdots + p_n(x) = 0 + \cdots + x + \cdots + 0 = x.$$

On a $p_1 + \cdots + p_n = \text{Id}_E$ sur chaque E_i , donc sur tout l'espace par "recollement". En effet, tout $x \in E$ s'écrit $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$.

Correction de l'exercice 31 ▲

1. On remarque que

$$(\beta - \alpha)\text{Id}_E = (f - \alpha\text{Id}_E) - (f - \beta\text{Id}_E).$$

Autrement dit, si $x \in E$, on a $x = y + z$ avec

$$y = (f - \alpha Id_E)(y_1) \text{ et } y_1 = \frac{1}{\beta - \alpha}x$$

et

$$z = (f - \beta Id_E)(z_1) \text{ et } z_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}x.$$

2. La relation s'écrit encore

$$f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta Id_E = 0$$

soit

$$f \circ \frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E) = Id_E$$

et

$$\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E) \circ f = Id_E$$

ce qui prouve que f est inversible, d'inverse $\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E)$.

3. On commence par prouver que les espaces vectoriels sont en somme directe. En effet, si $x \in \ker(f - \alpha Id_E) \cap \ker(f - \beta Id_E)$, alors

$$f(x) = \alpha x \text{ et } f(x) = \beta x$$

ce qui prouve que $(\beta - \alpha)x = 0 \implies x = 0$. D'autre part, la relation implique que $\text{Im}(f - \beta Id_E) \subset \ker(f - \alpha Id_E)$. Mais dans cette relation, tout commute et on a aussi

$$(f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E) = 0$$

et donc $\text{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \ker(f - \beta Id_E)$. Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la première question pour conclure. En effet, si $x = y + z$ avec $y \in \text{Im}(f - \alpha Id_E)$ et $z \in \text{Im}(f - \beta Id_E)$, alors $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - \beta Id_E)$ et $z \in \ker(f - \alpha Id_E)$.

4. On utilise à nouveau le résultat de la question 1. En effet, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $p(x) = z$ et donc

$$p(x) = (f - \beta Id_E) \left(\frac{1}{\alpha - \beta}x \right).$$

Correction de l'exercice 32 ▲

1. La condition est suffisante. En effet, si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors

$$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

et donc $p + q$ est un projecteur. Réciproquement, si $p + q$ est un projecteur, alors le calcul précédent donne

$$p \circ q + q \circ p = 0.$$

On a alors :

$$p \circ q = p^2 \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p) = -(p \circ q) \circ p = (q \circ p) \circ p = q \circ p.$$

On obtient donc $p \circ q = q \circ p$ et $p \circ q = -q \circ p$, ce qui entraîne $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.

2. Prouvons d'abord que $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont en somme directe. En effet, si $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$, alors $x = p(x)$ et $x = q(x)$ (ce sont des projecteurs) d'où $x = p(x) = p(q(x)) = 0$. D'autre part, il est clair que $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Réciproquement, soit $z = p(x) + q(y) \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$. Alors

$$p(z) = p^2(x) + p \circ q(y) = p(x) \text{ et } q(z) = q \circ p(x) + q^2(y) = q(y).$$

Ainsi, $z = (p + q)(z) \in \text{Im}(p + q)$. Enfin, on a toujours $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(p + q)$. Réciproquement, si $p(x) + q(x) = 0$, alors puisque $\text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q)$ sont en somme directe, on a $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$.

Correction de l'exercice 33 ▲

Si $x \in \ker(f^p)$, alors $f^p(x) = 0$. On a alors

$$f^q(x) = f^{q-p}(f^p(x)) = f^{q-p}(0) = 0.$$

Ainsi, $\ker(f^p) \subset \ker(f^q)$. Soit maintenant $y \in \text{Im}(f^q)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $y = f^q(z)$. Mais alors on a

$$y = f^p(f^{q-p}(z)) = f^p(z') \text{ avec } z' = f^{q-p}(z).$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(f^p)$ et $\text{Im}(f^q) \subset \text{Im}(f^p)$.

Correction de l'exercice 34 ▲

Supposons d'abord que $g \circ f = 0$, et prenons $y \in \text{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $g(y) = g \circ f(x) = 0$, et donc $y \in \ker g$. Réciproquement, supposons que $\text{Im} f \subset \ker g$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im} f \subset \ker g$, et donc $g(f(x)) = 0$, prouvant que $g \circ f = 0$.

Correction de l'exercice 35 ▲

Prenons $x \in \ker(u)$. Alors $u(x) = 0$, donc $v(u(x)) = 0$, donc $u(v(x)) = 0$. Ainsi, $v(x) \in \ker(u)$. Prenons ensuite $y \in \text{Im}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Mais alors

$$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}(u).$$

C'est bien que $v(\text{Im}(u)) \subset \text{Im}(u)$.

Correction de l'exercice 36 ▲

Puisque $f^{n-1} \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. On va prouver que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre. Pour cela, si on a

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0,$$

on applique f^{n-1} à cette égalité. Puisque $f^k(x) = 0$ si $k \geq n$, on obtient

$$\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0 \implies \lambda_0 = 0$$

puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$. On continue en composant par f^{n-2} , puis par f^{n-3} , etc... pour trouver successivement que λ_1, λ_2 jusqu'à λ_{n-1} sont nuls.

Correction de l'exercice 37 ▲

1. Puisque la famille $(x, f(x))$ est liée, il existe $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $ax + bf(x) = 0$. Puisque $x \neq 0$, on ne peut pas avoir $b = 0$ et donc $f(x) = \frac{-a}{b}x$. On a le résultat avec $\lambda_x = \frac{-a}{b}$. Bien sûr, ce λ_x est défini uniquement, car si on a $f(x) = \lambda_1 x$ et $f(x) = \lambda_2 x$, alors $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2$ puisque $x \neq 0$.

2. Écrivons $y = \mu x$. Alors

$$\mu \lambda_y x = \lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$$

et on peut simplifier par $\mu x \neq 0$ pour prouver que $\lambda_x = \lambda_y$. Calculons $f(x+y)$ de deux façons différentes. D'une part,

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y,$$

d'autre part,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Puisque la famille (x, y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique. On obtient donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$

3. Écrivons $y = \mu x$. Alors

$$\mu \lambda_y x = \lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x$$

et on peut simplifier par $\mu x \neq 0$ pour prouver que $\lambda_x = \lambda_y$.

4. Calculons $f(x+y)$ de deux façons différentes. D'une part,

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y,$$

d'autre part,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Puisque la famille (x, y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique. On obtient donc $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.

5. D'après les questions précédentes, tous les λ_x , pour $x \neq 0$, sont égaux, et donc il existe un scalaire λ tel que, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \lambda x$. Ceci reste bien sûr vrai si $x = 0$: f est bien une homothétie.

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Prenons $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0$ et donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. Ainsi $x \in \ker(f^2)$ et $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. Prenons ensuite $y \in \operatorname{Im}(f^2)$. Alors il existe $z \in E$ tel que $y = f^2(z) = f(u)$ avec $u = f(z)$. Ainsi, $y \in \operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Im}(f)$.

2. Supposons d'abord que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$. Il suffit de démontrer que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$. Choisissons $x \in \ker(f^2)$. Alors $f^2(x) = 0$ et posons $y = f(x)$. Alors $y \in \operatorname{Im}(f)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$ donc $y \in \ker(f)$. On en déduit que $y = 0$ et que $x \in \ker(f)$, d'où l'inclusion demandée. Supposons ensuite que $\ker(f) = \ker(f^2)$ et prouvons que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Alors $f(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $f^2(x) = f(y) = 0$ et donc $x \in \ker(f^2) \subset \ker(f)$. Ainsi, $f(x) = 0$ donc $y = 0$ et on a bien prouvé que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$.

3. Supposons d'abord que $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = E$ et prouvons que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2)$ (seule inclusion qu'il reste à démontrer). Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \ker(f)$ et $v \in \operatorname{Im}(f)$. En particulier, il existe $w \in E$ tel que $v = f(w)$. Mais alors, $y = f(x) = f(u) + f^2(w) = f^2(w) \in \operatorname{Im}(f^2)$, ce qu'il fallait démontrer. Supposons pour terminer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$ et démontrons que $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = E$. Soit $y \in E$. L'hypothèse nous dit qu'il existe $z \in E$ tel que $f(y) = f^2(z)$. Posons $u = y - f(z)$ et $v = f(z)$. Alors $f(u) = f(y) - f^2(z) = 0$ appartient à $\ker(f)$ tandis que $v \in \operatorname{Im}(f)$. Ainsi, on a bien prouvé que $\ker(f) + \operatorname{Im}(f) = E$.

Correction de l'exercice 39 ▲

Avant de traiter l'exercice, remarquons que $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont bien des sous-espaces de E .

1. Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(g)$. Alors il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. On a alors

$$g \circ f \circ g(x) = g \circ f(y) = g(0) = 0.$$

Mais on sait aussi que $g \circ f \circ g(x) = g(x) = y$. Ainsi, y est nul et les sous-espaces vectoriels $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont bien en somme directe.

2. Procédons par analyse-synthèse. Analyse : Prenons $z \in E$ et supposons que $z = x + y$ avec $x \in \ker(f)$ et $y = g(u) \in \operatorname{Im}(g)$. On a alors $f(z) = f(y) = f \circ g(u)$. Mais $g \circ f(z) = g \circ f \circ g(u) = g(u) = y$. On est donc incité à poser $y = g \circ f(z)$. Synthèse : Soit $z \in E$ et posons $y = g \circ f(z)$ qui est dans $\operatorname{Im}(g)$ et $x = z - y$. Reste à vérifier que $x \in \ker(f)$. On a

$$f(x) = f(z) - f(y) = f(z) - f \circ g \circ f(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

3. Il suffit de vérifier que $f \circ g = \operatorname{Id}_F$ puis d'utiliser l'associativité de la composition. Remarquons que l'on n'a pas $g \circ f = \operatorname{Id}_E$ (penser à l'image des polynômes constants). Ni f ni g ne sont inversibles car f n'est pas injective (penser à nouveau aux polynômes constants) et g n'est pas surjective (les polynômes constants, à part le polynôme nul ne sont pas dans $\operatorname{Im}(g)$).

Correction de l'exercice 40 ▲

Avant de commencer l'exercice, on peut remarquer que l'on a toujours $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$, et que c'est l'inclusion réciproque qui n'est pas toujours vraie, et qui sera donc utile dans l'exercice pour prouver la réciproque. \Rightarrow : Soit $y \in \text{Im}(g)$, $y = g(x)$ avec $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = f(z) \in \text{Im}(f)$ et $x_2 \in \ker(g)$. On a donc

$$y = g(x) = g \circ f(z) \in \text{Im}(g \circ f)$$

ce qui prouve l'inclusion difficile. \Leftarrow : Commençons par une petite analyse du problème. Soit $x \in E$ que l'on veut décomposer sous la forme $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \text{Im}(f)$ et $x_2 \in \ker(g)$. En particulier, $x_1 = f(z)$ avec $z \in E$. Dans ce cas, on a $g(x) = g \circ f(z)$. L'inclusion $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$ entraîne l'existence d'un tel z ... Passons à la synthèse. Soit $x \in E$ et soit $z \in E$ tel que $g \circ f(z) = g(x)$ (un tel z existe puisque $\text{Im}(g) \subset \text{Im}(g \circ f)$). Posons $x_1 = f(z)$ et $x_2 = x - x_1$. Il suffit de prouver que $g(x_2) = 0$. Mais

$$g(x_2) = g(x) - g(x_1) = g(x) - g \circ f(z) = 0.$$

On a bien prouvé que $E = \text{Im}(f) + \ker(g)$.

Correction de l'exercice 41 ▲

Soit (e_1, \dots, e_p) une base de E . Pour chaque i , il existe un entier n_i tel que $f^{n_i}(e_i) = 0$. Posons $n = \max(n_1, \dots, n_p)$ et remarquons que pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$f^n(e_i) = f^{n-n_i}(f^{n_i}e_i) = f^{n-n_i}(0) = 0.$$

Considérons maintenant $x \in E$ et écrivons-le $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$. On obtient

$$f^n(x) = \sum_{i=1}^p x_i f^n(e_i) = \sum_{i=1}^p x_i 0_E = 0_E.$$

Correction de l'exercice 42 ▲

1. On peut commencer par remarquer que si $f(x) = 0$, alors $f^2(x) = 0$ et donc on a toujours $\ker(f) \subset \ker(f^2)$. C'est l'autre implication qui n'est pas toujours vraie. Supposons donc $\ker(f) = \ker(f^2)$ et montrons que $\text{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$. Soit $y \in \text{Im}(f) \cap \ker(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et de plus $f(y) = 0$. En particulier, $f^2(x) = 0$, donc $f(x) = 0$, puisque $\ker(f^2) \subset \ker(f)$. Ainsi, $y = f(x) = 0$, ce qui prouve une implication. Réciproquement, supposons $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$ et montrons que $\ker(f^2) \subset \ker(f)$. Si $x \in \ker(f^2)$, alors on a $f(f(x)) = 0$. Si on pose $y = f(x)$, alors $y \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$, et donc $f(x) = y = 0$, ce qui prouve que $x \in \ker(f)$.

2. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$. Or, si $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$, $\ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$: il est donc égal à E tout entier. On vient donc de prouver que

$$\ker(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\} \iff \ker(f) \oplus \text{Im}(f) = E.$$

En tenant compte de la question précédente, ceci prouve la première équivalence. On va ensuite démontrer que la première et la troisième assertion sont équivalentes, ce qui achèvera la preuve. En effet, si $\ker(f) = \ker(f^2)$, d'après le théorème du rang, on

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(f)) &= \dim(E) - \dim(\ker(f)) \\ &= \dim(E) - \dim(\ker(f^2)) \\ &= \dim(\text{Im}(f^2)). \end{aligned}$$

Or, on a toujours $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ puisque $f^2(x) = f(f(x))$ pour tout x de E . Les deux sous-espaces sont égaux. La réciproque se prouve exactement de la même façon. On remarque que $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f^2))$ entraîne $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^2))$ en utilisant le théorème du rang, et on utilise l'inclusion toujours vraie $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

Correction de l'exercice 43 ▲

Supposons d'abord qu'une telle application existe. D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2 \dim(\ker(f))$$

et donc $\dim(E)$ est pair. Réciproquement, si E est de dimension paire, alors considérons (e_1, \dots, e_{2p}) une base de E . On définit un endomorphisme f de E en posant :

$$f(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq p \\ e_{i-p} & \text{si } i > p. \end{cases}$$

Ceci définit complètement un endomorphisme f . Montrons qu'il vérifie les propriétés demandées. D'une part, pour $u = \sum_{i=1}^{2p} u_i e_i$, on a

$$f(u) = \sum_{i=p+1}^{2p} u_i e_{i-p} = \sum_{j=1}^p u_{j+p} e_j.$$

On en déduit que $f(u) = 0$ si et seulement si $u \in F = \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_p)$. De plus, on a $\operatorname{Im}(f) \subset F$, et par le théorème du rang, ces deux espaces ont la même dimension égale à p . Ils sont donc égaux.

Correction de l'exercice 44 ▲

D'après le théorème du rang, si un tel endomorphisme existe, on a $p + q = n$. Réciproquement, supposons que $p + q = n$. On va définir f sur une base bien choisie de E . Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F . On peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ de E . Soit également (f_1, \dots, f_q) une base de G . On définit alors l'action de f sur la base (e_i) par

$$\begin{cases} f(e_i) &= 0 & \text{si } i \leq p \\ f(e_i) &= f_{i-p} & \text{si } i \in \{p+1, \dots, p+q\} \end{cases}$$

Il est alors à peu près clair que f vérifie les conditions voulues. Pour obtenir une preuve complète, on peut remarquer que $F \subset \ker(f)$ et que $G \subset \operatorname{Im}(f)$. De plus, en décomposant un vecteur dans la base (e_1, \dots, e_{p+q}) , on trouve qu'on a exactement $F = \ker(f)$. Par le théorème du rang, on obtient $\dim(G) = \dim(\operatorname{Im}(f))$ d'où l'égalité puisqu'on a déjà une inclusion.

Correction de l'exercice 45 ▲

Soit (u_1, \dots, u_r) une base de $\operatorname{Im}(f)$, que l'on complète en une base $(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$ de F . Notons, pour $i = 1, \dots, r$, P_i la projection sur $\operatorname{vect}(u_i)$ parallèlement à $\operatorname{vect}(u_j : j \neq i)$, puis $f_i = P_i \circ f$. Puisque $\operatorname{Im}(f_i) \subset \operatorname{vect}(u_i)$, on a $\operatorname{rg}(f_i) \leq 1$, et si on note x_i tel que $f(x_i) = u_i$, on a $f_i(x_i) = P_i(u_i) = u_i$, ce qui prouve que f_i n'est pas l'application nulle et est donc de rang 1. Il reste à démontrer que $f = \sum_{i=1}^r f_i$. Mais si

$$f(x) = \sum_{i=1}^r a_i u_i,$$

alors

$$f_i(x) = P_i f(x) = a_i u_i$$

et donc

$$\sum_{i=1}^r f_i(x) = \sum_{i=1}^r a_i u_i = f(x).$$

Correction de l'exercice 46 ▲

1. Supposons d'abord qu'un tel endomorphisme existe, et notons g la restriction de f à F . Alors g est une application linéaire de F avec $\operatorname{Im}(g) = G$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(G) = \dim(\operatorname{Im}(g)) \leq \dim(\operatorname{Im}(g)) + \dim(\ker(g)) = \dim(F).$$

Une condition nécessaire est donc $\dim(G) \leq \dim(F)$. Réciproquement, supposons que $q = \dim(G) \leq \dim(F) = p$. On va construire un endomorphisme f de E en le définissant sur une base de G . Pour cela, on commence par considérer une base (e_1, \dots, e_p) de F . Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base (e_1, \dots, e_n) de E . De même, considérons une base (g_1, \dots, g_q) de G . On définit f sur la base (e_1, \dots, e_n) en posant $f(e_i) = g_i$ si $i \leq q$, et $f(e_i) = 0$ sinon. f est un endomorphisme de E . De plus, si on étudie sa restriction à F , on voit qu'elle est à image dans G (ce ne sont que des vecteurs de G qui sont pris par les $f(e_i)$) et que cette image est en réalité G tout entier : tous les vecteurs de la base (g_1, \dots, g_q) de G sont atteints (et par linéarité, tous les autres le sont aussi).

2. Le raisonnement est très proche. D'une part, puisqu'un isomorphisme respecte la dimension, il est nécessaire que $\dim(F) = \dim(G)$ (on peut aussi réécrire le théorème du rang pour la restriction de f à F et utiliser le fait que le noyau est réduit à $\{0\}$). Réciproquement, si $\dim(F) = \dim(G) = p$, on note (e_1, \dots, e_p) une base de F , qu'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de E , et on note (g_1, \dots, g_p) une base de G , qu'on complète également en une base (g_1, \dots, g_n) de E . On définit alors f par $f(e_i) = g_i$. Il est facile de vérifier que f vérifie toutes les contraintes voulues.

Correction de l'exercice 47 ▲

1. On a $\text{Im}(u+v) \subset \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. En effet, si $y \in \text{Im}(u+v)$, alors $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$ est aussi élément de $\text{Im}(u) + \text{Im}(v)$. On en déduit que

$$\text{rg}(u+v) \leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \leq \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

D'autre part, en écrivant $u = (u+v) + (-v)$, et en remarquant que $\text{Im}(v) = \text{Im}(-v)$, et donc que $\text{rg}(v) = \text{rg}(-v)$, on a, d'après ce qu'on vient de démontrer

$$\text{rg}(u) \leq \text{rg}(u+v) + \text{rg}(v) \implies \text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u+v).$$

De même, écrivant $v = (u+v) + (-u)$, on obtient aussi

$$\text{rg}(v) - \text{rg}(u) \leq \text{rg}(u+v).$$

Ceci donne l'autre inégalité.

2. Traduisons les deux hypothèses en termes d'inégalités sur le rang.

D'une part, puisque $u \circ v = 0$, on a $\text{Im}(v) \subset \ker(u)$. On obtient donc $\text{rg}(v) \leq \dim(\ker(u))$ ce qui, combiné au théorème du rang, donne

$$n = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u) \geq \text{rg}(v) + \text{rg}(u).$$

D'autre part, puisque $u+v$ est inversible, on sait que $\text{rg}(u+v) = n$. De la question précédente, on déduit

$$n \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

En combinant les deux inégalités obtenues, on obtient le résultat désiré.

3. D'une part, puisque $u \circ v = 0$, on a $\text{Im}(v) \subset \ker(u)$. On obtient donc $\text{rg}(v) \leq \dim(\ker(u))$ ce qui, combiné au théorème du rang, donne

$$n = \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u) \geq \text{rg}(v) + \text{rg}(u).$$

4. D'autre part, puisque $u+v$ est inversible, on sait que $\text{rg}(u+v) = n$. De la question précédente, on déduit

$$n \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

Correction de l'exercice 48 ▲

Pour $k = 1, \dots, n-1$, le théorème du rang donne

$$a_k = \dim(\ker(f_k)) + \text{rg}(f_k) = \text{rg}(f_{k-1}) + \text{rg}(f_k),$$

où on a utilisé la propriété (ii). On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k &= -\operatorname{rg}(f_0) - \operatorname{rg}(f_1) + \operatorname{rg}(f_1) + \operatorname{rg}(f_2) - \cdots + (-1)^{n-1} \operatorname{rg}(f_{n-1}) \\ &= -\operatorname{rg}(f_0) + (-1)^{n-1} \operatorname{rg}(f_{n-1}).\end{aligned}$$

Puisque f_0 est injective, on a $\operatorname{rg}(f_0) = a_0$ et puisque f_{n-1} est surjective, on a $\operatorname{rg}(f_{n-1}) = a_n$. Ceci donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k = -a_0 + (-1)^{n-1} a_n,$$

ce qui donne bien $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = 0$.

Correction de l'exercice 49 ▲

1. Puisque $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n , il suffit de prouver qu'elle est libre. Supposons le contraire, et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires non tous nuls tels que $\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$. Soit p le plus petit indice tel que $\lambda_p \neq 0$. On compose par f^{n-1-p} :

$$f^{n-1-p}(\lambda_p f^p(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)) = \lambda_p f^{n-1}(x) = 0,$$

puisque $f^j = 0$ pour $j \geq n$. Puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$, on en déduit que $\lambda_p = 0$, une contradiction.

2. Remarquons d'abord que si $g = f^k$, alors clairement $gf = fg$, et donc tout élément de $\operatorname{vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$ commute avec f . Réciproquement, supposons que $gf = fg$. Soient a_0, \dots, a_{n-1} tels que

$$g(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x).$$

On va prouver que $g = a_0 Id + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a

$$g(f^k(x)) = a_0 f^k(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(f^k(x)),$$

ceci puisque $(x, \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E . La propriété est vraie, par définition de a_0, \dots, a_{n-1} , si $k = 0$. Pour $k \geq 1$, on a

$$g f^k = f g f^{k-1} = f^2 g f^{k-2} = \cdots = f^k g.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}g(f^k(x)) = f^k g(x) &= f^k(a_0 x + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x)) \\ &= a_0 f^k(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(f^k(x)).\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat voulu.

Correction de l'exercice 50 ▲

1. Si $x \in \ker(f^k)$, alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ et donc $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$. De même, si $y \in \operatorname{Im}(f^{k+1})$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$ et donc $y \in \operatorname{Im}(f^k)$.

2. Bien sûr, il suffit de prouver que $\ker(f^{k+2}) \subset \ker(f^{k+1})$. Mais si $x \in \ker(f^{k+2})$, alors $0 = f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x))$. On a donc $f(x) \in \ker(f^{k+1})$ et donc $f(x) \in \ker(f^k)$. Ceci implique $f^{k+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(f^{k+1})$. Supposons qu'il n'existe pas d'entiers k tel que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Ceci signifie que pour chaque entier k , l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ est stricte, et en particulier, on a

$$\dim(\ker(f^{k+1})) \geq \dim(\ker(f^k)) + 1.$$

On en déduit que pour tout entier k , on a $\dim(\ker(f^k)) \geq k$. Mais ceci n'est pas possible, puisque la dimension de $\ker(f^k)$ est majorée par n . On définit alors p comme le plus petit entier des entiers k tels que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Grâce au résultat de la question précédente, on a bien $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ si $k \geq p$. Le raisonnement de la question précédente donne en fait immédiatement que $p \leq n$. En effet, on a prouvé que pour tout $k \leq p$, on a $\dim(\ker(f^k)) \geq k$, et donc en particulier on a $n \geq \dim(\ker(f^p)) \geq p$.

3. Bien sûr, il suffit de prouver que $\ker(f^{k+2}) \subset \ker(f^{k+1})$. Mais si $x \in \ker(f^{k+2})$, alors $0 = f^{k+2}(x) = f^{k+1}(f(x))$. On a donc $f(x) \in \ker(f^{k+1})$ et donc $f(x) \in \ker(f^k)$. Ceci implique $f^{k+1}(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \ker(f^{k+1})$.

4. Supposons qu'il n'existe pas d'entiers k tel que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Ceci signifie que pour chaque entier k , l'inclusion $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ est stricte, et en particulier, on a

$$\dim(\ker(f^{k+1})) \geq \dim(\ker(f^k)) + 1.$$

On en déduit que pour tout entier k , on a $\dim(\ker(f^k)) \geq k$. Mais ceci n'est pas possible, puisque la dimension de $\ker(f^k)$ est majorée par n . On définit alors p comme le plus petit entier des entiers k tels que $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$. Grâce au résultat de la question précédente, on a bien $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ si $k \geq p$.

5. Le raisonnement de la question précédente donne en fait immédiatement que $p \leq n$. En effet, on a prouvé que pour tout $k \leq p$, on a $\dim(\ker(f^k)) \geq k$, et donc en particulier on a $n \geq \dim(\ker(f^p)) \geq p$.

6. Ceci résulte immédiatement du théorème du rang et de la définition de p . En effet, si $k < p$, alors $\dim(\ker(f^k)) \neq \dim(\ker(f^{k+1}))$ et donc $\dim(\operatorname{Im}(f^k)) \neq \dim(\operatorname{Im}(f^{k+1}))$. De même, si $k \geq p$, on a $\dim(\ker(f^k)) = \dim(\ker(f^{k+1}))$ et donc $\dim(\operatorname{Im}(f^k)) = \dim(\operatorname{Im}(f^{k+1}))$. Comme on sait déjà que $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k)$, ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

7. Par le théorème du rang, il suffit de prouver que $\ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p) = \{0\}$. Soit $y \in \ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^p(x)$. On sait aussi que $f^p(y) = f^{2p}(x) = 0$, et donc $x \in \ker(f^{2p})$. Mais par définition de p , on a $\ker(f^{2p}) = \ker(f^p)$ et donc $x \in \ker(f^p)$. Ceci entraîne $y = 0$ et le résultat.

8. On va poser $F = \ker(f^p)$ et $G = \operatorname{Im}(f^p)$. On commence par remarquer que F est stable par f . En effet, si $x \in F$, alors $f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = 0$ et donc $f(x) \in F$. Bien sûr, $f|_F$ est nilpotent puisque, pour tout $x \in F$, $f^p(x) = 0$. Posons ensuite $g = f|_G$. Remarquons d'abord que g est bien un endomorphisme de G , puisque $g(\operatorname{Im}(f^p)) = \operatorname{Im}(f^{p+1}) \subset G$. De plus, g est injective car $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f^p) \subset \ker(f^p) \cap \operatorname{Im}(f^p) = \{0\}$. Ainsi, g est un automorphisme de G (qui est de dimension finie).

9. Soit k un entier naturel et g_k la restriction de f à $\operatorname{Im}(f^k)$. Alors d'après le théorème du rang, on a

$$d_k = \dim(\operatorname{Im}(f^k)) = \dim(\ker(g_k)) + \dim(\operatorname{Im}(g_k)).$$

Mais $\operatorname{Im}(g_k) = g_k(\operatorname{Im}(f^k)) = f(\operatorname{Im}(f^k)) = \operatorname{Im}(f^{k+1})$. Ainsi, on a :

$$d_k - d_{k+1} = \dim(\ker(g_k)).$$

Mais $g_k = f|_{\operatorname{Im}(f^k)}$ et donc $\ker(g_k) = \ker(f) \cap \operatorname{Im}(f^k)$. Puisque la suite $\operatorname{Im}(f^k)$ est décroissante (pour l'inclusion), on en conclut qu'il en est de même pour $\ker(g_k)$ et donc que la suite $(d_k - d_{k+1})$ est décroissante.

Correction de l'exercice 51 ▲

Remarquons d'abord que

$$\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g).$$

Ceci entraîne

$$\operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)).$$

Supposons d'abord que $\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$. Alors l'inégalité précédente implique immédiatement que $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) = 0$ ce qui prouve $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$. On a aussi $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$ (sinon l'inégalité précédente serait stricte). Ainsi, pour tout $x \in E$, comme $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f + g)$, on a $f(x) = f(t) + g(t)$ pour un certain $t \in E$. Alors $g(t) = f(x - t) \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$, et donc $t \in \ker(g)$ et $x - t \in \ker(f)$. Écrivant $x = (x - t) + t$, on trouve que $\ker(f) + \ker(g) = E$. Réciproquement, prouvons que les deux conditions impliquent $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f + g)$. En effet, on écrit $y \in \operatorname{Im}(f)$ sous la forme $y = f(x)$, et on décompose x en $x = u + v$ avec $u \in \ker(f)$ et $v \in \ker(g)$. Alors, $y = f(v) = f(v) + g(v) \in \operatorname{Im}(f + g)$. Le rôle joué par f et g étant symétrique, on obtient aussi $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(f + g)$. Ceci permet d'écrire

$$\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Im}(f + g).$$

L'autre inclusion étant toujours vraie, on a en fait égalité, ce qui donne bien

$$\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

Correction de l'exercice 52 ▲

On remarque que $H_1 + H_2$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient strictement H_1 . Ainsi, $\dim(H_1 + H_2) > n - 1$. Puisque $\dim(H_1 + H_2) \leq n$, on a $\dim(H_1 + H_2) = n$. Par la formule de Grassmann,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) = 2(n - 1) - n = n - 2.$$

Correction de l'exercice 53 ▲

La forme linéaire identiquement nulle vérifie les hypothèses et la conclusion. On suppose désormais $\varphi \neq 0$. Notons $\phi \in E^*$ défini par $\phi(P) = P(a)$. Il s'agit de prouver que les formes linéaires φ et ϕ sont proportionnelles, c'est-à-dire que leurs noyaux sont égaux. Pour cela, on pose $F = \{(X - a)P; P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]\}$. Par hypothèse, $F \subset \ker \varphi$. De plus, si $\phi(Q) = 0$, alors $(X - a)|Q$ et donc $Q \in F$. Ainsi, on a $\ker \phi \subset F$. On a donc

$$\ker \phi \subset F \subset \ker \varphi.$$

Puisque les deux sous-espaces situés aux extrémités de cette chaîne d'inclusion ont la même dimension, tous ces sous-espaces sont égaux. En particulier, $\ker \phi = \ker \varphi$ et les deux formes linéaires sont proportionnelles. Un autre raisonnement, plus élémentaire, consiste à remarquer que pour tout P de E , $P(X) - P(a)$ se factorise en $(X - a)Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Ainsi, par hypothèse sur ϕ on a $\varphi(P) = \varphi(1)P(a)$.
